

Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей № 4 Красноармейского района Волгограда»

РАССМОТРЕНО
научно методический совет
протокол № 1
от «30» августа 2024 г.

СОГЛАСОВАНО
педагогический совет
Протокол №1
от «30» августа 2024 г.

УТВЕРЖДЕНО
Директор МОУ лицей № 4
Приказ № 193-ОД
от «30» августа 2024 г.

Программа учебного курса
«Математическая мозаика» (7 класс)

Волгоград 2024 г.

Основной особенностью современного развития системы математического образования является ориентация на широкую дифференциацию обучения математике, позволяющую решить две задачи. С одной стороны – обеспечить базовую математическую подготовку, а с другой – сформировать у учащихся устойчивый интерес к предмету, выявить и развить их математические способности, ориентировать на профессии, связанные с математикой, подготовить к обучению в ВУЗе. Практическая полезность дисциплины «математика» обусловлена тем, что её предметом являются фундаментальные структуры реального мира. Учебный курс реализует требования государственных стандартов по математике, значительно углубляет их, дополняет разнообразием задач по различным темам. Содержание программы разработано на основе обязательного минимума содержания общеобразовательной программы основного общего образования по математике для учащихся 7 класса.

Актуальность курса состоит в том, что он направлен на расширение знаний учащихся по математике, развитие их теоретического мышления и логической культуры.

Новизна данного курса заключается в том, что программа включает новые для учащихся задачи, не содержащиеся в базовом курсе. Предлагаемый курс содержит задачи по разделам, которые обеспечат более осознанное восприятие учебного материала. Творческие задания позволяют решать поставленные задачи и вызвать интерес у обучаемых. Задания позволяют повышать образовательный уровень всех учащихся, так как каждый сможет работать в зоне своего ближайшего развития.

Отличительные особенности данного курса в том, что этот курс подразумевает доступность предлагаемого материала для учащихся, планомерное развитие их интереса к предмету. Сложность задач нарастает постепенно. Приступая к решению сложных задач, рассматриваются вначале простые, входящие как составная часть в решение трудных. Развитию интереса способствуют математические игры, викторины, проблемные задания и т.д.

Программа ориентирована на учащихся 7 классов, которым интересна как сама математика так и процесс познания нового.

Преподавание данного курса строится как углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач, требующих высокой логической и операционной культуры, развивающих научно-теоретическое и алгоритмическое мышление учащихся. Данные занятия дают возможность шире и глубже изучать программный материал, задачи повышенной трудности, больше рассматривать теоретический материал и работать над ликвидацией пробелов знаний учащихся, и внедрять принцип опережения.

Основные принципы:

- **обязательная согласованность** курса с курсом алгебры как по содержанию, так и по последовательности изложения. Каждая тема курса начинается с повторения соответствующей темы курса алгебры. Факультатив является развивающим дополнением к курсу математики.
- **вариативность** (сравнение различных методов и способов решения одного и того же уравнения или неравенства);
- **самоконтроль** (регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач должен быть неременным элементом самостоятельной работы учащихся).

Цели данного курса:

1. Повышение интереса к предмету.
2. Овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смешанных дисциплин, для продолжения образования.
3. Интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности.

Задачи курса:

1. Развитие творческих способностей учащихся на основе проб.
2. Развития мышления учащихся, формирование у них умений самостоятельно приобретать и применять знания.

3. Формирование познавательного интереса к математике, развитие творческих способностей, осознание мотивов учения.
4. Формирование умений выдвигать гипотезы, строить логические умозаключения, пользоваться методами аналогии, анализа и синтеза.

Место предмета в федеральном базисном учебном плане

Согласно федеральному базисному учебному плану для образовательных учреждений Российской Федерации рабочая программа ~~учебного~~ курса в 7 классе рассчитана на 34 часа в год (1 час в неделю) за счёт компонента ОУ.

Формы организации учебных занятий

Формы проведения занятий включают в себя лекции, практические работы, работа в группах / парах, индивидуальная. Основной тип занятий комбинированный урок. Каждая тема курса начинается с постановки задачи. Теоретический материал излагается в форме мини - лекции. После изучения теоретического материала выполняются задания для активного обучения, практикумы по решению задач, выполняются практические работы в рабочей тетради, проводится работа с тестами. Занятия строятся с учётом индивидуальных особенностей обучающихся, их темпа восприятия и уровня усвоения материала.

Систематическое повторение способствует более целостному осмыслению изученного материала, поскольку целенаправленное обращение к изученным ранее темам позволяет учащимся встраивать новые понятия в систему уже освоенных знаний. Методы работы: частично-поисковые, эвристические, исследовательские, тренинги.

Планируемые результаты

Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения учебного предмета.

Личностным результатом изучения предмета является формирование следующих умений и качеств:

- развитие умений ясно, точно и грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи;
- креативность мышления, общекультурное и интеллектуальное развитие, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач;
- формирование готовности к саморазвитию, дальнейшему обучению;
- выстраивать конструкции (устные и письменные) с использованием математической терминологии и символики, выдвигать аргументацию, выполнять перевод текстов с обычного языка на математический и обратно;
- стремление к самоконтролю процесса и результата деятельности;
- способность к эмоциональному восприятию математических понятий, логических рассуждений, способов решения задач, рассматриваемых проблем.

Метапредметным результатом изучения курса является формирование универсальных учебных действий (УУД).

Регулятивные УУД:

- самостоятельно обнаруживать и формулировать учебную проблему, определять цель УД;
- выдвигать версии решения проблемы, осознавать (и интерпретировать в случае необходимости) конечный результат, выбирать средства достижения цели из предложенных, а также искать их самостоятельно;

- составлять (индивидуально или в группе) план решения проблемы (выполнения проекта);
- сверять, работая по плану, свои действия с целью и при необходимости исправлять ошибки самостоятельно (в том числе и корректировать план);
- совершенствоваться в диалоге с учителем самостоятельно выбранные критерии оценки.

Познавательные УУД:

- формировать представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, о ее значимости в развитии цивилизации;
- осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотек и Интернета;
- определять возможные источники необходимых сведений, анализировать найденную информацию и оценивать ее достоверность;
- использовать компьютерные и коммуникационные технологии для достижения своих целей;
- создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач;
- осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;
- анализировать, сравнивать, классифицировать и обобщать факты и явления;
- давать определения понятиям.

Коммуникативные УУД:

- самостоятельно организовывать учебное взаимодействие в группе (определять общие цели, договариваться друг с другом и т. д.);
- в дискуссии уметь выдвинуть аргументы и контраргументы;
- учиться критично относиться к своему мнению, с достоинством признавать ошибочность своего мнения и корректировать его;
- понимая позицию другого, различать в его речи: мнение (точку зрения), доказательство (аргументы), факты (гипотезы, аксиомы, теории);
- уметь взглянуть на ситуацию с иной позиции и договариваться с людьми иных позиций.

Предметным результатом изучения курса является сформированность следующих умений.

В результате изучения курса учащиеся должны:

- освоить основные приёмы и методы решения нестандартных задач; уметь применять при решении нестандартных задач творческую оригинальность, вырабатывать собственный метод решения;
- улучшить вычислительные навыки и навыки работы с величинами, отношениями и процентами;
- приобрести навыки рационального решения задач;
- научиться анализировать, сопоставлять данные;
- должны усвоить различные способы решения линейных уравнений, равнений, содержащие модуль, систем линейных уравнений;
- овладеть навыками преобразования графиков линейных функций, строить графики элементарных функций, содержащих модуль;
- успешно выступать на математических соревнованиях

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- решения несложных практических расчетных задач, в том числе с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора;
- устной прикидки и оценки результата вычислений; проверки результата вычисления с использованием различных приемов;

- интерпретации результатов решения задач с учетом ограничений, связанных с реальными свойствами рассматриваемых процессов и явлений.

Учебно - тематический план

№	Тема	Кол-во часов	Даты проведения	
			план	план
	Действия с дробями	3		
1	Понятие периодических дробей	2		
2	Дроби	1		
	Процентные расчеты	4		
3	Проценты. Основные задачи на проценты	1		
4	Задачи на смеси, растворы и сплавы	3		
	Преобразование выражений	11		
5	Преобразование буквенных выражений	1		
6	Делимость целых чисел	2		
7	Формулы сокращенного умножения	2		
8	Двухзначные и трехзначные числа	2		
9	Деление многочлена на многочлен	2		
10	Принцип Дирихле	3		
	Принцип Дирихле	2		
11	Принцип Дирихле и делимость целых чисел	1		
12	Модуль и параметры	10		
	Модуль числа. Решение линейных уравнений, содержащих модуль	2		
13	Линейные уравнения с параметрами	2		
14	Линейные Диофантовы уравнения	2		
15	Системы линейных уравнений, содержащих модуль	2		
16	Системы линейных уравнений с параметрами	2		
17	Графики	4		
18	Графики функций, содержащих модуль	2		
19	Решение уравнений графическим способом	2		
20	Итоговое занятие	1		
	Итого	34		

Содержание курса

1. Действия с дробями (3ч)

Периодические дроби

Перевести обыкновенную дробь в десятичную легко – надо всего лишь делить **уголком**. При этом получается либо конечная десятичная дробь (когда знаменатель **несократимой** обыкновенной дроби не делится ни на какие простые числа, кроме 2 и 5), **либо** периодическая дробь (чисто периодическая – когда знаменатель не делится ни на 2, **ни** на 5; смешанная периодическая – в остальных случаях).

Периодическая дробь – это бесконечная десятичная дробь, в которой с некоторого места, периодически повторяется определенная группа цифр. Например, 2,5131313... Обычно такую дробь записывают короче: 2,5(13). Если в периодической дроби повторяющаяся группа цифр (период) расположена непосредственно после запятой, то такую дробь называют чисто периодической; в противном случае говорят, что десятичная дробь имеет предпериод, и называют дробь смешанной периодической.

Общее правило обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные: Чисто периодическая правильная десятичная дробь, равна обыкновенной дроби, в числителе которой записан период, а знаменатель состоит из столькох девяток, сколько цифр в периоде.

Смешанная правильная периодическая десятичная дробь равна обыкновенной дроби, в числителе которой стоит разность между числом, образованным цифрами, стоящими после запятой до начала второго периода, и числом, образованным цифрами, стоящими после запятой до начала первого периода; знаменатель состоит из столькох девяток, сколько цифр в периоде, и столькох нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.

Например:

$$0,(142857) = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}; 0,24(617) = \frac{24617 - 24}{99900} = \frac{24593}{99900}.$$

Дроби

1. Упростите выражение:

$$a) \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; б) \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; в) \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}; г) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1}.$$

2. Представьте в виде разности дробей:

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2}; б) \frac{1}{3 \cdot 4}; в) \frac{1}{x(x+1)}; г) \frac{1}{(x+2)(x+3)}; д) \frac{1}{2 \cdot 4}; е) \frac{1}{3 \cdot 5}.$$

Указание. Используйте равенство $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

4. Докажите, что при любом натуральном n :

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 1;$$
$$б) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{1}{2}.$$

5. Упростите выражение:

$$a) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)};$$

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)};$$

2. Процентные расчеты (4ч)

Проценты

Процентом от любой величины называется одна сотая часть.

Любое число процентов можно выразить десятичной дробью или натуральным числом. Для этого нужно число, стоящее перед знаком %, разделить на 100.

Пример 1. $47\% = \frac{47}{100}$; $300\% = \frac{300}{100} = 3$.

Чтобы выразить число в процентах, его надо умножить на 100.

Пример 2. $0,47 = (0,47 \cdot 100)\% = 47\%$.

Простейшие задачи на проценты:

1. Нахождение процента от числа.

Чтобы найти процент от числа, надо это число умножить на соответствующую дробь.

Пример 3. 13% от 2000 руб. равны $2000 \cdot 0,13 = 260$ руб.

2. Нахождение числа по его проценту.

Чтобы найти число по его проценту, надо часть, соответствующую этому проценту, разделить на соответствующую дробь.

Пример 4. Если 8,4 кг есть 12% массы штанги, то масса штанги равна $8,4 : 0,12 = 70$ кг.

3. Нахождение процентного отношения двух чисел.

Чтобы узнать, сколько процентов одно число составляет от второго, надо первое число разделить на второе и результат умножить на 100.

Пример 5. 18 г. соли в растворе 240 г. составляет $\frac{18 \cdot 100}{240} = 7,5\%$ раствора.

Задачи на смеси, растворы и сплавы

В задачах, связанных с использованием понятий “концентрация” и “процентное содержание”, речь идёт о составлении сплавов, растворов или смесей нескольких веществ.

При решении задач данного типа используются следующие допущения:

1. Всегда выполняется «Закон сохранения объема или массы»: если два раствора (сплава) соединяют в «новый» раствор (сплав), то выполняются равенства:

$V = V_1 + V_2$ – сохраняется объем.

$m = m_1 + m_2$ – закон сохранения массы.

2. Все получающиеся сплавы или смеси однородны;

3. При соединении растворов и сплавов не учитываются химические взаимодействия их отдельных компонентов.

Такое допущение не представляет собой закона физики и не всегда выполняется в действительности. На самом деле при смешивании двух растворов не объем, а масса равняется сумме составляющих её компонент.

Рассмотрим смесь трёх компонент А, В, С. Объем смеси v складывается из объемов чистых компонент: $v = v_A + v_B + v_C$, а три отношения $d_A = \frac{v_A}{v}$, $d_B = \frac{v_B}{v}$, $d_C = \frac{v_C}{v}$ показывают,

каждую долю полного объёма смеси составляют объёмы отдельных компонентов $v_A = d_A v$; $v_B = d_B v$; $v_C = d_C v$.

Отношения объёма чистой компоненты (v_A) в растворе ко всему объёму смеси $v : d_A$

$\frac{v_A}{v} = \frac{v_A}{v_A + v_B + v_C}$ называется объёмной концентрацией этой компоненты.

Концентрация – это безразмерная величина.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна единице $d_A + d_B + d_C = 1$.

Объёмным процентным содержанием компоненты А называется величина $P = d_A \cdot 100\%$, т. е. концентрация этого вещества, выраженная в процентах.

Если известно процентное содержание вещества А, то его концентрация находится по

формуле $d_A = \frac{P_A}{100}$.

Таким же способом определяется массовая концентрация и процентное содержание, а именно как отношение массы чистого вещества А в сплаве к массе всего сплава. О какой концентрации, объёмной или массовой, идёт речь в конкретной задаче, всегда видно из условия.

Задача 1. Имеется кусок сплава с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившейся новый сплав содержал 40% меди?

Решение: Пусть масса олова, которую надо добавить к сплаву, равна x кг. Тогда получится сплав массой $(12+x)$ кг, содержащий 40% меди. Значит, в новом сплаве имеется $\frac{12+x}{100} \cdot 40$ кг меди. Исходный сплав массой 12 кг содержал 45% меди, т.е. меди в нём было $\frac{12}{100} \cdot 45$ кг. Так как масса меди и в имевшемся, и в сплаве одна и та же, то можно записать следующее уравнение: $\frac{(12+x)40}{100} = \frac{12}{100} \cdot 45$. Решив его, получим $x = 1,5$.

Ответ: 1,5 кг.

Задача 2. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Решение: Пусть масса стали первого сорта равна x т, тогда стали второго сорта надо взять $(140 - x)$ т. Содержание никеля в стали первого сорта составляет 5%, значит, в x т стали первого сорта содержится $x \cdot 0,05$ т никеля. Содержание никеля в стали второго сорта составляет 40%, значит, в $(140 - x)$ т стали второго сорта содержится $(140 - x) \cdot 0,4$ т никеля. По условию после объединения взятых двух сортов должно получиться 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля, т. е. после переплавки в полученной стали должно быть $140 \cdot 0,3$ т никеля. Но это количество никеля складывается из $x \cdot 0,05$ т, содержащихся в стали первого сорта, и из $(140 - x) \cdot 0,4$ т, содержащихся в стали второго сорта. Таким образом, запишем уравнение $x \cdot 0,05 + (140 - x) \cdot 0,4 = 140 \cdot 0,3$, из которого находим $x = 40$. Следовательно, стали с 5%-ным содержанием никеля надо взять 40 т, а стали с 40%-ным содержанием – 100 т.

Ответ: 40 т, 100 т.

1. Преобразование выражений (11ч)

Делимость целых чисел. Определение и свойства делимости.

Целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если существует такое целое число c , что $a = bc$.

Если a делится на b , то ka делится на b .

Если целые числа a и b делятся на целое число m , то сумма $a + b$ и разность $a - b$ делятся на m .

Если a кратно m и m кратно b , то a кратно b .

Если a делится на k , b делится на n , то произведение ab делится на произведение kn .

Теорема о делении с остатком

Для любого целого числа a и натурального числа b , существует единственная пара чисел q и r таких что $a = bq + r$, где q – целое, r – натуральное или нуль, причем r может принимать лишь b различных значений $0; 1; 2; \dots; b - 1$.

Если остаток r равен нулю, то число a делится на b .

Количество делителей.

Степень p^n любого простого числа p имеет $n + 1$ делителей: $1; p; p^2; \dots; p^n$. Если p_1, p_2, \dots, p_k – различные простые числа, а a_1, a_2, \dots, a_k – натуральные числа, то число $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ имеет $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$ различных делителей (считая 1 и n).

Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Общим делителем чисел a и b называется число, на которое делятся оба числа a и b . Для нахождения НОД ($a; b$) можно использовать алгоритм Евклида, выполняя последовательно деление с остатком.

Например. Найти $D(7975; 2585)$.

Решение. Выполняя деление, получаем

$$\begin{array}{r} 7975 \overline{) 2585} \\ 2585 \overline{) 220} \\ 2420 \overline{) 11} \\ 220 \overline{) 165} \\ 165 \overline{) 1} \\ 165 \overline{) 55} \\ 165 \overline{) 3} \\ \hline 0 \end{array}$$

Так как последний отличный от нуля остаток равен 55, то $D(7975; 2585) = 55$.

Общим кратным чисел a и b называется число, которое делится на a и на b .

$$\text{НОД}(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = ab.$$

Признаки делимости

Задачи для самостоятельного решения

- В числе 1234567* укажите последнюю цифру так, чтобы число делилось на:
а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 8; е) 11; з) 25.
- Докажите, что число: а) $100^{100} - 1$; б) $10^n + 35$ – составное.
- Докажите, что число: а) $19^{1990} - 34^{10}$; б) $34^{1990} - 19^{10}$ кратно 5.

4. Замените звёздочки в записи числа $72*3*$ цифрами так, чтобы это число делилось без остатка на 45.

5. Число $82**$ делится на 90. Найдите делимое.

6. Найдите цифры x и y пятизначного числа $42x4y$, если известно, что это число делится на 72.

Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^{n-k} + \dots + a + 1);$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \dots + (-1)^k a^{2m-k}b^k + \dots - ab^{2m-1} + b^{2m});$$

$$a^{2m+1} - b^{2m+1} = (a - b)(a^{2m} + a^{2m-1}b + \dots + (-1)^k a^{2m-k}b^k + \dots + ab^{2m-1} + b^{2m}).$$

Двузначные и трёхзначные числа

Запись \overline{ab} означает число, в котором a десятков и b единиц. Это число можно представить в виде многочлена: $\overline{ab} = 10a + b$.

Запись \overline{abc} означает число, в котором a сотен, b десятков и c единиц. Это число можно представить в виде многочлена: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Пример 1. Первая цифра трёхзначного числа 8. Если эту цифру переставить на последнее место, то число увеличится на 18. Найдите первоначальное число.

Решение: Пусть a – цифра десятков искомого числа, b – цифра его единиц. Тогда по условию задачи имеем: $\overline{ab8} - 8\overline{ab} = 18$,

откуда $10\overline{ab} + 8 - 800 - \overline{ab} = 18$, $9\overline{ab} = 810$, $\overline{ab} = 90$, первоначальное число 890.

Ответ: 890.

Деление многочлена на многочлен

Чтобы разделить многочлен $F(x)$ на многочлен $f(x)$, надо:

- 1) расположить делимое и делитель по убывающим степеням x ;
- 2) разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен является первым членом частного;
- 3) первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
- 4) чтобы получить следующий член частного, надо с первым остатком поступить так же, как поступали с делимым в п. 2 и 3.

Это следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю, или остаток, степень которого ниже степени делителя.

Пример 1. Выполните деление с остатком $x^3 - 3x + 2$ на $x + 2$.

Решение:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 0x^2 - 3x + 2 \quad x+2 \quad \Big| \quad \\
 \underline{x^3 + 2x^2} \quad \quad \Big| \quad x^2 - 2x + 1 \\
 \text{(первый остаток)} \quad -2x^2 - 3x + 2 \quad \\
 \underline{-2x^2 - 4x} \quad \quad \quad \text{(второй остаток)} \quad x + 2 \\
 x + 2 \quad \quad \quad \\
 \underline{} \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Пример 2. Найдите все такие целые c , при которых дробь $\frac{c+7}{c-4}$ является целым числом.

Решение: Выделим целую часть из дроби.

$$\begin{array}{r} c+7 \overline{) c-4} \\ \underline{c-4} \\ 11 \end{array}$$

$\frac{c+7}{c-4} = 1 + \frac{11}{c-4}$, поэтому исходное число будет целым, если 11 кратно $c-4$. 11 – простое

число, значит, его делителями будут

- 11, - 1, 1, 11. Решим 4 уравнения: $c-4 = -11$; $c-4 = -1$;

$c-4 = 1$; $c-4 = 11$.

Получаем $c = -7$; $c = 3$; $c = 5$; $c = 15$.

Ответ: -7; 3; 5; 15.

2. Принцип Дирихле (3ч)

Принцип Дирихле

Пример 1. Можно ли рассадить 5 кроликов в 4 клетки так, чтобы в каждой клетке было не более одного кролика?

Решение: Предположим, что нам это удалось. Тогда, если в каждой клетке не более одного кролика, то в 4 клетках не более четырёх кроликов, а у нас их 5. Значит, это сделать невозможно.

Более общий вывод из этой задачи можно сформулировать в следующем виде:

Если у нас имеется сколько-то клеток, а кроликов на одного больше, то после рассаживания кроликов по клеткам найдётся клетка, где сидит по крайней мере два кролика.

Это и есть принцип Дирихле. Его можно записать и иначе на «математическом» языке:

После рассаживания в n клетках $n+1$ кролика найдётся клетка, где сидит, по крайней мере, два кролика.

Попробуем обобщить принцип Дирихле,

Пример 2. Можно ли рассадить 9 кроликов в 4 клетки так, чтобы в каждой клетке было не более двух кроликов?

Решение. Этого сделать нельзя: по крайней мере в одной клетке будет сидеть не меньше трёх кроликов. Отметим, что их может быть и больше трёх (если, например, посадить в 3 клетки по одному кролику, а в четвертую всех остальных).

Пример 3. Можно ли рассадить в 20 клеток 101 кролика так, чтобы в каждой клетке было не более 5 кроликов?

Решение. Нельзя. В некоторой клетке будет не меньше шести кроликов.

Обобщение принципа Дирихле.

В данные n клеток мы разместили $nk+1$ кролика. Тогда найдётся клетка, где сидит не менее $k+1$ кролика.

Пример 4. В классе учится 29 человек. Серёжа допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделал большего числа ошибок. Доказать, что по крайней мере трое учеников сделали одинаковое количество ошибок.

Решение: Пусть «клетки» - это количество ошибок, которые могли сделать школьники: 0, 1, 2, ..., 13. Их 14. За «кроликов» примем учеников, писавших диктант. Их $29 = 14 \cdot 2 + 1$. Тогда по принципу Дирихле (а точнее, по его обобщению) найдётся «клетка», в которой

сидит не меньше трёх «кроликов», а это и означает, что найдётся трое школьников сделавших одинаковое количество ошибок.

Принцип Дирихле и делимость целых чисел

1. Доказать, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Решение: При делении на 5 возможных 5 разных остатков:

0; 1; 2; 3; 4. Так как чисел 6, то найдутся 2 числа с одинаковыми остатками; их разность разделится на 5.

2. Доказать, что из любых трех целых чисел можно найти два, сумма которых делится на 2.

Решение: Среди трёх целых чисел обязательно найдутся два числа одинаковой чётности (так как чисел 3, а классов – чётных и нечётных чисел – лишь два). Сумма их делится на 2.

3. Докажите, что среди любых 11 целых чисел можно найти два, разность которых делится на 10.

4. Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

Решение: При делении на 3 есть три остатка: 0, 1, 2. Так как

$7 = 3 \cdot 2 + 1$, то найдутся три числа, дающие один остаток.

5. Доказать, что найдётся число вида $11 \dots 10 \dots 00$, делящееся на 1998.

Решение: Рассмотрим 1999 чисел:

$$1, 11, \dots, \underbrace{11 \dots 111}_{1999}$$

Среди них есть два с одинаковыми остатками при делении на 1998. Их разность – искомое число.

3. Модуль и параметры (10ч)

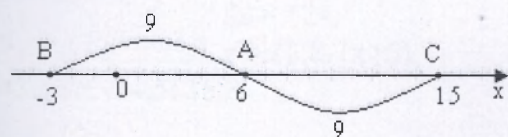
Модуль числа. Решение линейных уравнений, содержащих модуль

Любое действительное число можно изобразить точкой числовой прямой. Расстояние этой точки от начала отсчета на этой прямой равно положительному числу или нулю, если точка совпадает с началом числовой прямой.

Расстояние точки, изображающей данное число на числовой прямой, от начала этой прямой называется модулем этого числа. Модуль числа a обозначается $|a|$. Геометрический смысл модуля удобно использовать при решении некоторых уравнений.

Пример 1. Решите уравнение: $|x - 6| = 9$.

Решение:



Если число 6 изобразить точкой A, то по определению модуля следует, что точка X отстоит от точки A на расстоянии 9 единиц. Но на числовой прямой таких точек две. Одна имеет координату $x = 6 + 9 = 15$, другая $x = 6 - 9 = -3$. Следовательно, уравнение имеет два решения: $x = 15$ и $x = -3$.

Ответ: 15; -3.

Пример 2. Решите уравнение: $|x - 1| + |x - 3| = 6$.

Решение: Решить уравнение $|x - 1| + |x - 3| = 6$ – значит найти все такие точки на числовой оси Ox , для каждой из которых сумма расстояний от неё до точек с координатами 1 и 3 равна 6.

Ни одна из точек отрезка $[1; 3]$ не удовлетворяет этому условию, так как сумма указанных расстояний для любой из них равна 2 (т.е. не равна 6). Вне этого отрезка существует только две искомые точки: точка с координатами 5 и точка с -1.

Ответ: 5; -1.

При решении уравнений, содержащих несколько выражений со знаком модуля, удобнее пользоваться алгебраическим определением модуля числа: модулем положительного числа и нуля является само число, модулем отрицательного числа называется противоположное ему положительное число.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

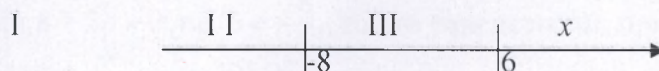
Пример 3. $|2x - 12| + |6x + 48| = 160$.

Решение:

а) Найдём корни (нули) каждого выражения, содержащего знак модуля:

$$\begin{aligned} 2x - 12 &= 0, & 6x + 48 &= 0, \\ x &= 6, & x &= -8. \end{aligned}$$

б) Найденные значения x разбивают числовую прямую на три промежутка: $x < -8$, $-8 \leq x \leq 6$; $x > 6$. Решение данного уравнения рассматривается в каждом промежутке отдельно.



в) I. $x < -8$.

В данном промежутке оба выражения, стоящие под знаком модуля, отрицательны.

$$\begin{aligned} -(2x - 12) - (6x + 48) &= 160, \\ -2x + 12 - 6x - 48 &= 160, \\ -8x &= 196, \\ x &= -24,5. \quad (x < -8). \end{aligned}$$

II. $-8 \leq x \leq 6$. В данном промежутке первое выражение, стоящее под знаком модуля, отрицательно, а второе положительное,

$$\begin{aligned} -(2x - 12) + (6x + 48) &= 160, \\ -2x + 12 + 6x + 48 &= 160, \\ 4x &= 100, \\ x &= 25 \text{ (не принадлежит данному промежутку)}. \end{aligned}$$

III. $x > 6$.

Оба выражения, стоящие под знаком модуля, положительны.

$$\begin{aligned} (2x - 12) + (6x + 48) &= 160, \\ 2x - 12 + 6x + 48 &= 160, \\ 8x &= 124, \\ x &= 15,8. \quad (x > 6). \end{aligned}$$

Ответ: -24,5; 15,8.

Линейные уравнения с параметрами

Уравнение вида $Ax = B$, где A, B – выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называется линейным уравнением с параметрами.

Решить уравнение с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество всех корней заданного уравнения.

Линейное уравнение $Ax = B$ исследуется по следующей схеме.

1) Если $A = 0$ и $B \neq 0$, то уравнение не имеет решений ($x \in \emptyset$).

2) Если $A = 0$ и $B = 0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и удовлетворяется при любом x , т.е. решением уравнения будет множество всех действительных чисел ($x \in R$).

3) Если $A \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{B}{A}$.

Пример 1. Для всех значений параметров k решить уравнение $(k + 4)x = 2k + 1$.

Решение: Уравнение записано в стандартном виде $Ax = B$, поэтому его исследование проведём по указанной схеме.

1) Если $k + 4 = 0$, т.е. $k = -4$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = -7$, откуда $x \in \emptyset$.

2) Если $k + 4 \neq 0$, т.е. $k \neq -4$, то обе части уравнения можно делить на $k + 4$. Тогда $x = \frac{2k + 1}{k + 4}$.

Ответ: если $k = -4$, то $x \in \emptyset$;

если $k \neq -4$, то $x = \frac{2k + 1}{k + 4}$.

Пример 2. Для всех значений параметров a и b решить уравнение $(a - 2)x = 4a + 3b$.

Решение: 1) $a = 2$. Уравнение имеет вид $0 \cdot x = 8 + 3b$.

Если $8 + 3b \neq 0$, т.е. $b \neq -\frac{8}{3}$, то это равенство ни при каком x не выполняется, поэтому $x \in \emptyset$.

Если $b = -\frac{8}{3}$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, откуда следует: $x \in R$.

2) $a - 2 \neq 0$, т.е. $a \neq 2$. Тогда $x = \frac{4a + 3b}{a - 2}$.

Ответ: если $a = 2$, $b \neq -\frac{8}{3}$, то $x \in \emptyset$;

если $a = 2$, $b = -\frac{8}{3}$, то $x \in R$;

если $a \neq 2$, b – любое, то $x = \frac{4a + 3b}{a - 2}$.

Линейные Диофантовы уравнения

Определение. Уравнения, в которых неизвестные величины выражаются целыми числами, называются диофантовыми по имени математика Диофанта.

Рассмотрим уравнение

$$ax + by = c \quad (a \neq 0, b \neq 0), \quad (1)$$

коэффициенты, которого a , b и c – целые числа.

Пусть $d = D(a; b)$ или $d = (a; b)$ или $d = \text{НОД}(a; b)$ – наибольший общий делитель a и b .

Правило 1. Если c не делится на наибольший общий делитель $(a; b)$, то уравнение (1) не имеет решений в целых числах (тем более в натуральных).

Правило 2. Если $c \in Z$ делится на $\text{НОД}(a; b)$, то уравнение (1) имеет целые решения. Если $c \in Z$ делится на $\text{НОД}(a; b)$, то уравнение (1) следует упростить, разделив обе его части на $\text{НОД}(a; b)$.

Правило 3. Если a и b – взаимно простые числа, то уравнение $ax + by = 1$ имеет решение в целых числах x и y .

Правило 4. Чтобы найти решение уравнения (1) при взаимно простых a и b , нужно сначала найти решение $(x_0; y_0)$ уравнения $ax + by = 1$; числа cx_0 и cy_0 составят решение уравнения (1).

Правило 5. Если коэффициенты a и b уравнения (1) взаимно просты, то все решения уравнения (1) получаются по формулам $x = x_1 - bn$, $y = y_1 + an$, $n \in \mathbb{Z}$, где x_1 и y_1 одно из решений этого уравнения.

Пример 1. Решите диофантово уравнение $6x + 9y = 2$.

Решение: $\text{НОД}(6; 9) = 3$, а 2 на 3 не делится. Значит, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет решений.

Пример 2. Решите в целых числах уравнение $28x - 40y = 60$.

Решение: $\text{НОД}(28; 40) = 4$, число 60 делится на 4. Значит, уравнение имеет решения в целых числах. Сократим уравнение на 4, получим уравнение $7x - 10y = 15$. Сначала подберём частное решение уравнения $7x - 10y = 1$. $\text{НОД}(7; 10) = 1$. $x_0 = 3$ и $y_0 = 2$ – частное решение уравнения $7x - 10y = 1$. $x_1 = 3 \cdot 15 = 45$ и $y_1 = 2 \cdot 15 = 30$ – частное решение уравнения $7x - 10y = 15$.

Общее решение уравнения $7x - 10y = 15$ задаётся формулами $x = 45 + 10t$, $y = 30 + 7t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(45 + 10t, 30 + 7t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите диофантово уравнение $6x + 9y = 3$. (*)

Решение: $\text{НОД}(6; 9) = 3$, число 3 делится на 3. Значит, уравнение имеет решения в целых числах. Сократим уравнение на 3, получим уравнение $2x + 3y = 1$. (1) Сначала подберём частное решение уравнения $2x + 3y = 1$. $x = 5$, $y = -3$ является частным решением уравнения (1), так как справедливо равенство $2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) = 1$.

В уравнении (1) заменим число 1 выражением $2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3)$ и преобразуем полученное уравнение:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3), \\ 2(x - 5) + 3(y + 3) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Введём новые неизвестные:

$$x' = x - 5, y' = y + 3, \quad (3)$$

уравнение (2) перепишем в виде

$$2x' + 3y' = 0. \quad (4)$$

Все решения однородного уравнения (3) задаются формулами $x' = -3n$, $y' = 2n$, где n – любое целое число. Используя равенства (3), получим, что все решения уравнения (*) задаются формулами $x = 5 + x' = 5 - 3n$, $y = -3 + y' = -3 + 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(5 - 3n, -3 + 2n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Линейные диофантовы уравнения применяются при решении задач.

Задача 1. У покупателя и продавца имеются монеты только по 2 р. и 5 р. Сможет ли покупатель заплатить за покупку стоимостью 1 р.?

Решение: Если покупатель даст x монет по 2 р. и y монет по 5 р., то он заплатит $(2x + 5y)$ р., или 1 р.

Следовательно, $2x + 5y = 1$. (1)

Пара $(3; -1)$ является частным решением уравнения (1), так как $2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 1$. Это означает, что покупатель может дать 3 монеты по 2 р. и получить сдачу 1 монету по 5 р.

Общее решение диофантова уравнения (1) имеет вид $x = 3 - 5n$, $y = -1 + 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Способов оплаты товара стоимостью 1 р. в задаче 1 бесконечно много. Если, например, окажется отрицательным, то это означает, что покупатель должен получить сдачу монетами по 5 р.

Ответ: Сможет.

Системы линейных уравнений, содержащих модуль

Пример 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} |x-3| + |y+2| = 6, \\ y+2 + 2|x-3| = 0. \end{cases}$$

Решение: Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |x-3| = 6 - |y+2|, \\ y+2 + 2|x-3| = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x-3| = 6 - |y+2|, \\ y+14 - 2|y+2| = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решим второе уравнение системы, $y+14-2|y+2|=0$, используя определение модуля

$$\text{числа: } \begin{cases} y \geq -2, \\ y+2+12-2y-4=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ -y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -2, \\ y+2+12+2y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -2 \\ 3y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -2 \\ y = -6 \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения системы (1) находим:

$$1) \begin{cases} |x-3| = -6 - \text{равенство невозможно} \\ y = 10; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} |x-3| = 6 - |-6+2| \\ y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| = 2 \\ y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \\ y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow (1; -6); (5; -6).$$

Ответ: (1;-6); (5;-6).

Системы линейных уравнений с параметрами

Система вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1, \\ A_2x + B_2y = C_2; \end{cases} \quad (1)$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ – выражения, зависящие от параметров,

а x, y – неизвестные, называется системой двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными в параметрах.

Если из какого-нибудь уравнения системы можно найти одну из неизвестных x или y через другую, то, подставив найденную неизвестную в другое уравнение, получим линейное уравнение с параметрами относительно одной неизвестной. Тем самым исследование системы сведётся к исследованию линейного уравнения.

Каждое из уравнений системы двух уравнений с двумя неизвестными представляется собой прямые.

На плоскости возможны три случая взаимного расположения двух прямых. Эти прямые могут:

а) пресекаться, в этом случае система (1) имеет единственное решение; коэффициенты системы удовлетворяют условию

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2};$$

б) совпадать, в этом случае система (1) имеет бесконечно много решений; коэффициенты системы удовлетворяют условию

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

в) параллельны, в этом случае система (1) не имеет решений; коэффициенты системы удовлетворяют условию

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Пример 1. Определить, при каких значениях m система

$$\begin{cases} 3x + 7y = 20, \\ mx + 14y = 15 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

Решение: Данная система имеет единственное решение, если $\frac{m}{3} \neq \frac{14}{7}$, т.е. $m \neq 6$.

Ответ: $m \neq 6$.

Пример 2. Определить, при каком значении m система $\begin{cases} mx - 6y = 9, \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$ не имеет решений.

Решение: Так как $\frac{-6}{-3} \neq \frac{9}{15}$, то данная система не имеет решений, если $\frac{m}{2} = \frac{-6}{-3}$, т.е. $m = 4$.

Ответ: $m = 4$.

Пример 3. Определить, при каком значении m система $\begin{cases} mx + 6y = 8, \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Решение: Так как $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$, то данная система имеет бесконечное множество решений, если

$$\frac{m}{5} = \frac{6}{3}, \text{ т.е. при } m = 10.$$

Ответ: $m = 10$.

4. Графики (4ч)

Графики функций, содержащих модуль

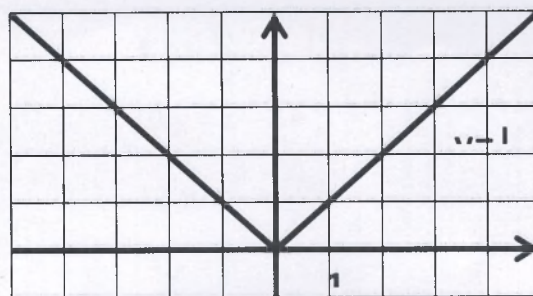
Для построения графиков функций, содержащих выражения под знаком модуля, сначала находят корни выражений, стоящих под знаком модуля. Эти корни разбивают числовую прямую на промежутки. График строят в каждом промежутке отдельно.

В случае, когда только одно выражение стоит под знаком модуля и нет слагаемых без знака модуля, можно построить график функции, опустив знак модуля, а затем часть графика, расположенную в области отрицательных значений y , отобразить симметрично относительно оси Ox . Это вытекает из определения модуля числа.

Пример 1. Постройте график функции $y = |x|$.

Решение: По определению модуля числа имеем:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$



Используя график функции $y = |x|$, постройте график функции:

1. $y = |x| - 3$.

2. $y = |x| + 1$.

3. $y = |x - 1|$.

4. $y = |x + 2|$.

5. $y = |x - 1| - 2$.

6. $y = |x + 3| - 4$.

7. $y = 1 - |x|$.

8. $y = 2 - |x + 1|$.

9. $y = ||x| - 1|$.

10. $y = ||x + 2| - 4|$.

11. $y = ||x - 2| - 3| - 1$.

12. $y = ||x| - 3| - 2$.

13. $y = ||1 - |x|| - 3| - 2$.

14. $y = |2 - |x - 1||$.

15. $y = ||x - 2| - 1| - 3| + 2$.

16. $y = -||x| - 1| - 2$.

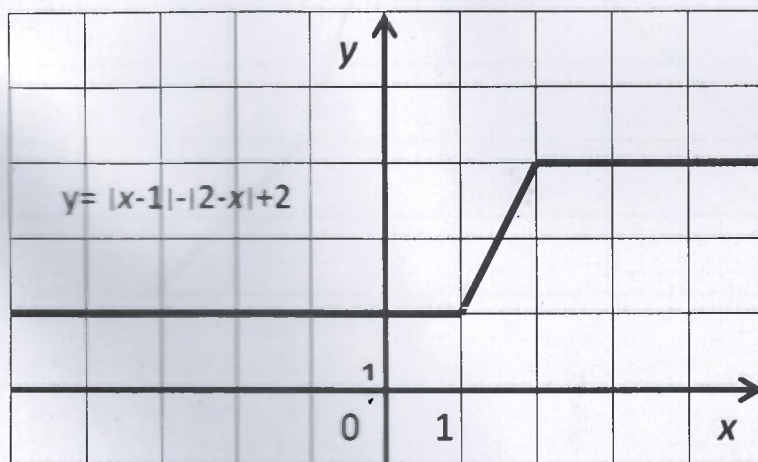
Пример 2. Постройте график функции: $y = |x - 1| - |2 - x| + 2$.

Решение: $x - 1 = 0; \quad 2 - x = 0;$
 $x = 1. \quad x = 2.$

1) $x < 1$: $y = -x + 1 - 2 + x + 2, y = 1$.

2) $1 \leq x \leq 2$: $y = x - 1 - 2 + x + 2, y = 2x - 1$.

3) $x > 2$: $y = x - 1 + 2 - x + 2, y = 3$.



Постройте график функции:

1. $y = |x - 1| + |x - 2| + x$.

2. $y = \left| \frac{1}{3}x - 2 \right| + \left| 3 + \frac{2}{3}x \right| - 3$.

3. $y = |x - 3| + |1 - x| - 4$.

4. $y = 7 - |x - 1| + |x + 5|$.

5. $y = |x - 1| + |x - 2|$.

6. $y = \frac{|x|}{x} + 2 \frac{|x+1|}{x+1}$.

$$7. y = 2x + 3 \frac{|x-2|}{x-2}.$$

$$9. y = x + |x|.$$

$$11. y = |x-5| + |x-2|.$$

$$13. y = |2x-5| + 3x-1.$$

$$8. y = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

$$10. y = x-3 + |x+2|.$$

$$12. y = \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-3|}{x-3}.$$

$$14. y = |x-1| + |x|.$$

31

$$15. y = |x+2| - |x| + |x-2|.$$

$$16. y = |2x-4| - 1 + |x|.$$

Постройте график уравнения:

$$1. y + |y| = x.$$

$$2. y = x|y|.$$

$$5. |3-y| = |2-x| + 1.$$

$$3. |x| + |y| = 1.$$

$$4. |y-2| = 3x-4.$$

$$6. |x| - |y| = 1.$$

Пример 3. Постройте график функции: $y = |x-1| - |x-2| - |x-3|$.

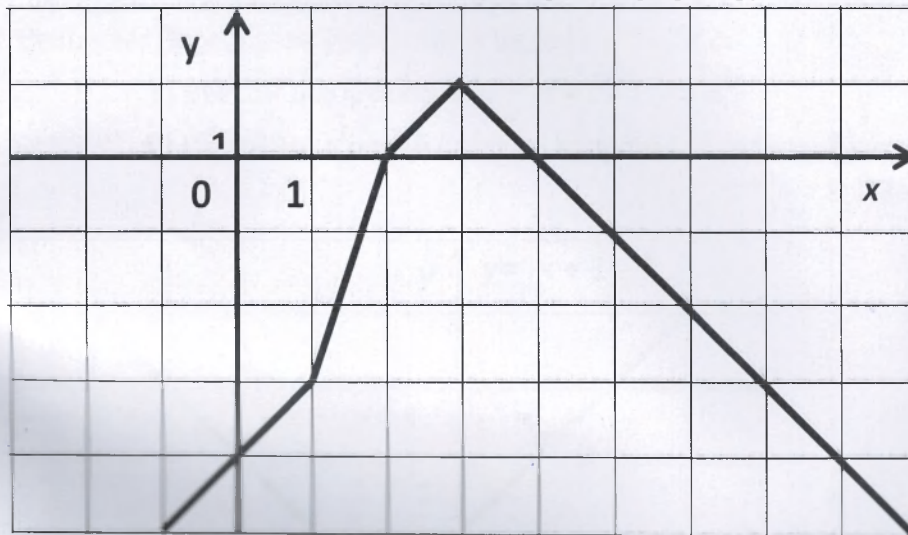
Решение: Графиком функции является ломаная линия с вершинами в точках с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Найдём ординаты этих точек:

$$y(1) = -|1-2| - |1-3| = -1-2 = -3,$$

$$y(2) = |2-1| - |2-3| = 1-1 = 0,$$

$$y(3) = |3-1| - |3-2| = 2-1 = 1.$$

Значит, вершинами ломаной являются точки: $(1; -3)$, $(2; 0)$, $(3; 1)$. Используя ещё две дополнительные точки $(0; -4)$ и $(4; 0)$, строим график функции.



Постройте график функции:

$$1. y = |x-1| + |x+1|.$$

$$2. y = |x| + |x-2|.$$

$$3. y = |x-2| + 3.$$

$$4. y = |x-2| + |x-3| - 1.$$

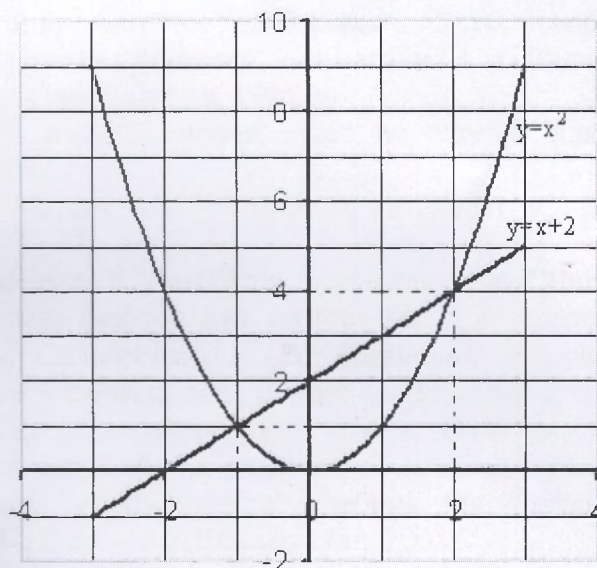
$$5. y = |x+1| + |x+2| - |x| + 2|x-2|.$$

Решение уравнений графическим способом

Пример 1. Решить уравнение: $x^2 = x + 2$.

Решение: 1) Рассмотрим две функции: $y = x^2$, $y = x + 2$.

2). Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$, $y = x + 2$.



3) $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$ – точки пересечения графиков.

4) $x = -1$; $x = 2$ – корни уравнения.

5) Ответ: $-1; 2$.

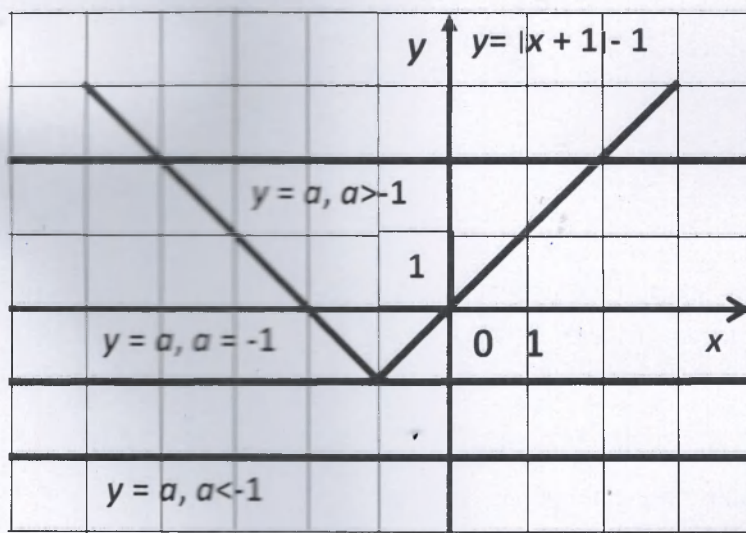
Некоторые задачи с параметрами, особенно задачи, связанные с разрешимостью и числом решений уравнений, наиболее удобно решать графическим методом.

Пример 2. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x + 1| = a + 1$.

Решение: Перепишем уравнение в виде $|x + 1| - 1 = a$.

1) Введём две функции: $y = |x + 1| - 1$; $y = a$.

2) Построим в одной системе координат графики функций $y = |x + 1| - 1$, $y = a$.



На основании рисунка получаем

Ответ: при $a < -1$ уравнение не имеет корней;

при $a = -1$ уравнение имеет одно решение;

при $a > -1$ уравнение имеет два корня.

Литература

1. Виленкин Н. Я. и др. Алгебра: Для 8 класса. : Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики /Н. Я. Виленкин и др., Под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1995.
2. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов. – М.: Просвещение, 1992.
3. Лепехин Ю. В. Математика. 7-8 классы/ авт. –сост. Ю. В. Лепехин. –Волгоград : Учитель, 2010.
4. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел, ч. 1. Числа. Учебное пособие для студентов физ.- мат. фак-тов. пед. ин-тов.- М.: Просвещение, 1974.
5. Мочалов В. В., Сильвестров В. В. Уравнения и неравенства с параметрами: Учебное пособие. – 2-е изд., доп., перераб. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2000.
6. Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра: Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений. Под ред. С. А. Теляковского. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2001.
7. Никольский С. М. и др. Алгебра: Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2003.
8. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры: Кн. для учащихся 7-9 классов ср. шк. _М.: Просвещение, 1990
9. Сикорский К. П. Дополнительные главы по курсу математики 7 – 8 классов для факультативных занятий. Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1969.
10. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5 – 7 кл. – 2-ое изд. - М.: Просвещение, 2002.
11. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. Под ред. М. И. Сканави. - 3-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1978.
12. Ткачева М. В. Домашняя математика: Кн. Для учащихся 7 кл. сред.шк. –М.: просвещение, 1993.